219 - Problèmes d'extremum

Intro sur optimisation. On ne considère que des fonctions à valeurs réelles (pour pouvoir parler d'extremum).
Plan : d'abord, quand est-ce qu'il existe des extremums, ensuite comment les localiser et enfin on résout quelques problèmes d'extremums.

I) **Critères d'existence et/ou d'unicité** [Rou] + [BMP]

Définitions extremum local/global [Rou 370]

1) Extremums et compacité

Th : f continue sur un compact => f bornée et atteint ses bornes [BMP 16]

Appl : Rolle [BMP 17] *(si f est constante c'est plié, sinon f a un minimum global et un max global qui sont différents. Somme f(a)=f(b), l'un de ces extremums est à l'intérieur du segment, la dérivée s'y annule)*

Déf : une application f est dite coercive si f(x) tend vers l'infini quand ||x|| tend vers l'infini.

Th (csq due th précédent) : E evn de DF, f continue et coercive sur E, C fermé. Alors f est minorée et atteint ses bornes sur C [BMP 30] *(l'inf de f sur C est égal à l'inf de f sur un certain B(0,R) inter C par coercivité, qui est compact car C fermé)*

Appl 1 : E un evn. F un sev. x dans E qcq. Alors la distance de x à F est atteinte. [BMP30] *(on applique le résultat précédent à C=E et f(y)=|y-x| qui est coercive car f(y)>|y|-|x|)*

2) Extremums et convexité

Prop : C un convexe non vide, f définie sur C. l'ensemble des points réalisant le minimum de f est un convexe [BMP 30] *(petit calcul)*

Prop : C un convexe non vide et f une fonction strictement convexe sur C. Alors il existe au plus un point de C minimisant f [BMP30]

Appl : dans l'appl précédente, si la norme est strictement convexe, le point de minimum est unique Si la norme sur E est strictement convexe, le minimum est même unique [BMP 30] *(l'ensemble des points réalisant le minimum est un convexe. y1 et y2 deux tels points, alors (y1+y2)/2 aussi et on écrit une triple égalité en norme et c'est là qu'intervient la stricte convexité de la norme)*

Appl : théorème de Fermat. On veut minimiser la fonction M->MA+MB+MC. Le minimum existe par coercivité. Elle est strictement convexe ce qui entraîne l'unicité [BMP 30] [Rou]

Prop : dans un Hilbert, il existe un unique point qui minimise la distance d'un point à un convexe fermé [BMP 16]
Dessins contre exemple (ensemble non convexe, ensemble non fermé).

II) **Localisation des extremums, étude locale** [Rou] + [Gou]

C'est là que le calcul diff intervient

1) Le calcul diff à notre secours

a) Ordre 1

Prop : CN d'extremum local d'ordre 1[Rou 371]

Rq : U ouvert est essentiel [Rou 371]

Prop : C un convexe non vide, ouvert. f une fonction convexe sur C. Si a est un point critique, alors f admet un extremum local en a [Rou 381]

b) Ordre 2

Prop : Taylor Young ordre 2 [Gou 316]

Csq : CN d'ordre 2 : si f a un minimum local en a et si f est deux fois différentiable, la différentielle seconde est une fq dp [Gou 316]

Prop : CS d'ordre 2 [Gou 316]

Rq : si la fq n'est pas dp ou dn, on sait pas ce qu'il se passe… C'est là que le lemme de Morse arrive.

Lemme : Morse

Ex : dimension 2, dessins [Rou 376]

Ex : [Gou 317]

2) Principe du maximum

Th : principe du max : si f vérifie « la propriété de la moyenne » (ou si f est harmonique, ou si f est holomorphe) sur un ouvert connexe, f atteint son max sur la frontière ; [BMP72] pour l'énoncé, démo [???] [Gou 318]

III) **Quelques problèmes d'extremums** [Rou] + [Gou] + [GT] + [ZQ]

1) Optimisation sous contrainte

Th : Extrema liés [Gou 317] *(csq du th des fonctions implicites)*

Ex : [Gou 317]

Appl : inégalité arithmético-géométrique [Gou 319] *(on regarde la fonction f(x1,…,xn)=x1…..xn et G={(x1,…,xn)>0 tq sum(x_i)=s}. f est continue sur G compact donc admet un max atteint en un a. On note g(x1,…,xn)=x1+…+xn-s et H le noyau de g, et on note O l'intersection de H avec R+. Alors a est dans O, f admet un extremum global sur O en a, O ouvert, on applique th)*

Appl : les éléments de SOn(R) sont les éléments de norme 2 minimale au sein des éléments de SLn(R) [Gou 321] *(f(M)=tMM, contrainte g(M)=0 où g(M)=detM-1)*

Appl : inégalité d'Hadamard [GT]

Appl : optimisation du volume d'une boîte [Rou 407]

2) Optimisation géométrique

a) Inégalité isopérimétrique

Th : formule de Green-Riemann

Csq : calcul d'une aire

Th : Inégalité isopérimétrique [ZQ 103], [Rou369] *(démo basée sur les séries de Fourier et la formule de Green-Riemann)*

b) Moindres carrés

Th : Moindres carrés (il existe des nombres qui minimisent la somme, ils sont uniques) [Rou 384]

Développements :

1 - Inégalité de Wirtinger + inégalité isopérimétrique [Analyse L2 529] (**)

2 - Inégalité d'Hadamard [GT 37 calcul diff] (**)

Bibliographie :

[Rou]
[Gou]
[ZQ]
[GT] Calcul diff

Idées en plus :

- Appl 2 : une preuve du théorème de d'Alembert Gauss. On applique le théorème à z->|P(z)|, on trouve un minimum, il faut montrer qu'il est nul [Rou382]
- billard elliptique [Rou413]
- *Optimisation numérique (voir [BMP22])*
- *Polynôme de meilleure approximation*
- *En éco : on définit la fct de prod f(K,L)= K^a*L^(1-a) (on doit avoir f croissante concave)*

K=capital, L=travail
*De là, la fonction profit est P(K,L)=p*f(K,L)-r_1*K – L*r_2*
On veut maximiser P suivant certaines contraintes (par exemples de positivité)
p = prix unitaire du produit
K=capital utilisé, L=nb d'employés (travail)
R_1=salaire par employé ; R_2= profit versé pour chaque unité de capital

Rapport jury 2005-2009 : *bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence).*